Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie
1989, Band XXXVI, Heft 2, S. 221—238

Methoden zur Analyse und Konstruktion von Aufgaben zur kognitiven Steuerung dynamischer Systeme

Ronald Hübner

Universität Regensburg

In der Denkpsychologie werden seit einiger Zeit mit Hilfe computersimulierter dynamischer Systeme Aufgaben für Untersuchungen konstruiert. Da die mathematischen Eigenschaften der meisten bis jetzt verwendeten Systeme nur unzureichend bekannt sind, hat das eine mangelnde Aufgabenbeschreibung zur Folge. Es wird deshalb angeregt, kanonische Formalismen der Systemtheorie zu verwenden, die zu Systemen mit bekannten Eigenschaften und Aufgaben mit eindeutigen Lösungen führen. Speziell werden diskrete lineare zeitinvariante Systeme favorisiert und entsprechende Ergebnisse zur Beurteilung ihrer Eigenschaften und Berechnung ihrer optimalen Lösungen zusammengestellt. Die Bedeutung des Instrumentariums wird anhand der Beurteilung bereits verwendeter Systeme demonstriert.

Fragestellung

In der deutschen Denkpsychologie werden seit Dörner (1975) in zunehmendem Maße computersimulierte dynamische Systeme zur Konstruktion von Aufgaben für Probanden (Pbn) im psychologischen Labor verwendet (für eine Übersicht siehe Funke, 1985 a). Ziel ist dabei u. a. die Erforschung der kognitiven Steuerung solcher Systeme, wobei auch die Generalisierung auf die Steuerung der durch sie repräsentierten realen Systeme (z. B. ökonomische oder ökologische) versucht wird. Betrachtet man nun die mit den dynamischen Systemen konstruierten Aufgaben allgemein als Denkaufgaben, dann ist die genaue Kenntnis der Aufgaben und ihrer Lösungen von entscheidender Bedeutung, worauf besonders Newell und Simon (1972) hingewiesen haben:

> "Just as a scissors cannot cut paper without two blades, a theory of thinking and problem solving cannot predict behavior unless it encompasses both an analysis of the structure of task environment and an analysis of the limits of rational adaptation to task requirements ... A complete theory of task environments would have to cover all of human knowledge — natural science, practical arts, games, fine arts, and what not" (S. 55).

Aber gerade hinsichtlich der Kenntnis der Eigenschaften der meisten bis jetzt für psychologische Fragestellungen verwendeten dynamischen Systeme besteht ein Mangel. Das liegt z.T. daran, daß zur Darstellung und Analyse der Systeme kaum kanonische Formalismen verwendet werden, die eine wünschenswerte mathematische Beschreibung und Analyse ermöglichen. Dies hat u.a. zur Folge, daß bis heute nur wenig vergleichbare Ergebnisse vorliegen. Es ist schwierig, die Anteile der Aufgaben (Systeme) und der Pbn am Zustandekommen der Ergebnisse einer Untersuchung deutlich zu trennen. Auch trägt die Vielfalt der konstruierten Systeme, der oft willkürlichen Bewertung der Leistungen der Pbn und die z.T. damit verbundene ideosynkratische Terminologie nicht gerade zur Vergleichbarkeit und Verständigung bei. Besonders die Bewertung der Leistung bei der Lösung dynamischer Probleme ist entscheidend und sollte rational begründet werden, da die Leistung meist als eine abhängige Variable in die Auswertung mit eingeht. Daß die Bewertung nicht immer optimal durchgeführt wird, belegen zwei weiter unten diskutierte Beispiele. Es scheint deshalb unumgänglich, auf bereits vorhandene Terminologien und Kalküle formaler Wissenschaften, wie die der mathematischen Systemtheorie, zurückzugreifen.

In dieser Arbeit sollen die Methoden der mathematischen Systemtheorie zusammengestellt werden, die eine Konstruktion von Aufgaben erlauben, die den oben geforderten Ansprüchen eher gerecht werden. Dabei werden diskrete lineare zeitinvariante Systeme favorisiert. Für diese Systeme ist die Beurteilung von Eigenschaften wie Stabilität, Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit sowie die Berechnung der optimalen Lösung für bestimmte Aufgabentypen besonders einfach. Daß solche Systeme bereits zur Konstruktion von Aufgaben verwendet wurden, belegen die zwei Beispiele, die weiter unten diskutiert werden. Allerdings wurden zu ihrer Darstellung unterschiedliche Formalismen verwendet, was dazu führt, daß ihre Gemeinsamkeiten nicht auf den ersten Blick deutlich werden. Hier wird als Formalismus die Zustandsraumdarstellung gewählt, weil diese Art der Darstellung für eine einheitliche Darstellung verschiedener Systeme sorgt und dabei Eigenschaften sichtbar werden, die beispielsweise bei einer Input-Output-Darstellung nicht ohne weiteres zu erkennen wären.

Zustandsraumdarstellung dynamischer Systeme

Die Zustandsraumdarstellung dynamischer Systeme wurde zuerst von Kalman (1957) eingeführt und ist seitdem zu einem Standard in der Systemtheorie und den Ingenieurswissenschaften geworden. So dargestellte Systeme haben die sogenannte *Markov-Eigenschaft,* d.h., daß der jeweilige Zustand die gesamte Information über die Vorgeschichte des Systems enthält, wie sie für die Bestimmung des gegenwärtigen und zukünftigen Verhaltens des Systems notwendig ist. Dies bringt in vieler Hinsicht Vorteile mit sich.

Es kann nicht das Ziel der vorliegenden Arbeit sein, alle Möglichkeiten der Zustandsraumdarstellung dynamischer Systeme zu berücksichtigen. Dazu sei auf die systemtheoretische Fachliteratur wie z.B. Kalman, Falb und Arbib (1969) oder Padulo und Arbib (1974) verwiesen, auf die sich auch große Teile der vorliegenden Arbeit stützten, und wo — wenn nicht anders angegeben — die Beweise der hier lediglich angeführten Ergebnisse nachgelesen werden können. Hier sollen lediglich die systemtheoretischen Ergebnisse zusammengestellt werden, die für eine Beurteilung und Konstruktion von Aufgaben für psychologische Zwecke besonders geeignet scheinen, weil sie den oben angeführten Forderungen genügen und relativ leicht praktisch umzusetzen sind.

Allgemein kann ein dynamisches System Σ durch fünf Mengen (T, U, Y, X, Ω) und zwei Funktionen φ und η beschrieben werden. T ist dabei eine *Zeitmenge,* U eine *Inputmenge,* X eine *Zustandsmenge,* Ω eine Menge zulässiger *Inputfunktionen* und Y eine *Outputmenge.* φ ist eine *Zustandsübergangsfunktion* und η eine *Outputfunktion.* Die allgemeinen einschränkenden Bedingungen, die diese Mengen und Funktionen erfüllen müssen, sollen hier nicht angeführt werden (vgl. dazu z.B. Padulo & Arbib, 1974), sondern gleich die speziellen Bedingungen, die zu diskreten linearen zeitinvarianten (dlz) Systemen führen. So wird ein dynamisches System Σ *diskret* genannt, wenn die Zeitmenge die Menge der ganzen Zahlen ist, d.h. wenn $T = \mathbf{Z}$. Ferner ist bei einem diskreten System die Menge Ω eine Menge U^* von endlichen *Inputfolgen* mit Elementen aus U: $U^* = \{u_0 u_1 \ldots u_{n-1} \mid n \geq 0$ und $u_j \in \upsilon\}$.

Die *Zeitinvarianz* eines dynamischen Systems besagt, daß die Zustandsübergangsfunktion φ und die Outputfunktion η nicht von der Zeit abhängen. Somit ist für diskrete zeitinvariante Systeme die Zustandsübergangsfunktion gegeben durch die Abbildung φ: $X \times U^* \rightarrow X$ und die Outputfunktion durch die Abbildung γ: $X \rightarrow Y$. *Linear* ist ein dynamisches System dann, wenn X, U, Y Vektorräume über demselben Körper sind und φ und η lineare Funktionen. Die Zustandsraumdarstellung eines dlz-Systems ist nun gegeben durch folgende Gleichungen:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Hierbei ist $k \in T$ der Zeitindex. x(k) bezeichnet also den Zustandsvektor x des Systems zum Zeitpunkt k. A, B und C sind lineare Operatoren:

$$A: X \rightarrow X,\ B: \rightarrow X \text{ und } C: X \rightarrow Y.$$

Wenn z.B. $X = \mathbf{R}^n$, $U = \mathbf{R}^m$ und $Y = \mathbf{R}^q$, dann ist A eine $n \times n$ Matrix, B eine $n \times m$ Matrix und C eine $q \times n$ Matrix. A wird *Systemmatrix*, B *Inputmatrix* und C *Outputmatrix* genannt. Die *Dimension* des Systems ist durch n gegeben.

Als Beispiel eines dlz-Systems soll das Modell eines sogenannten Gasabsorbers dienen, das von Hübner (1987, 1988) für psychologische Untersuchungen verwendet wurde.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.365 & 0.219 & 0.066 \\ 0.186 & 0.421 & 0.219 \\ 0.048 & 0.186 & 0.365 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.019 \\ 0.100 \\ 0.398 \end{bmatrix} u(k).$$

Die Outputmatrix ist eine Einheitsmatrix, so daß $y(k) = x(k)$. Auf die Semantik soll hier nicht näher eingegangen werden. Dazu sei auf Lapidus und Luus (1967) oder Hübner (1987) verwiesen.

Ein dlz-System ist somit durch seine drei Operatoren (A, B, C) bestimmt. Die Outputfunktion ist hier durch $\eta(x) = Cx$ gegeben. Die Zustandsübergangsfunktion ist für den jeweils nächsten Zeitpunkt gegeben durch:

$$\varphi(\hat{x}, u(k)) = A\hat{x} + Bu(k).$$

Für eine beliebige Anzahl von Zeitpunkten kann sie iterativ ermittelt werden. Wenn wir im Hinblick auf einen beliebigen Anfangszeitpunkt k_0, x_i für $x(k_0 + i)$ schreiben und u_i für $u(k_o + i)$ (für $i = 0, 1, 2, \ldots,$), dann ist:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, u_0) &= Ax_0 + Bu_0 = x_1 \\ \varphi(x_0, u_0u_1) &= Ax_1 + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1 = x_2 \\ \varphi(x_0, u_0u_1u_2) &= Ax_2 + Bu_2 = A^3x_0 + A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2 = x_3 \end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich so als Zustandsübergangsfunktion der Ausdruck:

$$x_k = \varphi(x_0, u_0u_1 \ldots u_{k-1}) = A^kx_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu_j, \; k > 0.$$

Erreichbarkeit und Steuerbarkeit

Bei der Verwendung dynamischer Systeme zur Konstruktion von Aufgaben für psychologische Untersuchungen sollte vom Versuchsleiter (Vl) nachgewiesen werden können, daß die Aufgabe, die er den Pbn stellt, prinzipiell zu erfüllen ist. Soll z.B. ein bestimmter Systemzustand erreicht werden, dann sollte auch sichergestellt sein, daß dieser Zustand erreichbar ist. Für dlz-Systeme lassen sich leicht zu überprüfende Kriterien angeben, anhand derer entschieden werden kann, ob Erreichbarkeit vorliegt oder nicht.

Für ein dlz-System wird ein Zustand $\tilde{x}$ *erreichbar* genannt, wenn es eine Inputfolge gibt, die den Nullzustand 0_x (d.h. alle Komponenten des Zustandsvektors sind Null) in den gewünschten Zustand $\tilde{x}$ überführt, d.h., wenn es ein $\omega \in U^*$ gibt, so daß $\varphi(0_x,\omega) = \tilde{x}$ gilt. Ein dlz-System wird *erreichbar* genannt, wenn alle seine Zustände erreichbar sind. Ein dlz-System wird *steuerbar* genannt, wenn es zu jedem beliebigen Anfangszustand x_0 und jedem gewünschten Endzustand $\tilde{x}$ eine Inputfolge gibt, die den Anfangszustand in den gewünschten Endzustand überführt, also wenn es ein $\omega \in U^*$ gibt, so daß $\varphi(x_0, u_0\, u_1 \ldots u_{k-1}) = \tilde{x}$ für alle $\tilde{x}$ gilt. Aus diesen Definitionen ergibt sich, daß ein Zustand $\tilde{x}$ erreichbar ist, wenn es eine Folge $u_0 u_1 \ldots u_{k-1}$ der Länge k gibt, so daß

$$\tilde{x} = A^k 0_x + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u_j \text{ gilt.}$$

Da $A^k 0_x = 0_x$ gilt, ist für ein dlz-System die Menge der Zustände, die vom Nullzustand 0_x in höchstens k Schritten erreichbar sind, genau der Wertebereich $\mathcal{W}$ des linearen Operators: $[A^{k-1} B \mid \ldots \mid AB \mid B]\colon U^k \rightarrow X$. Somit ist ein Zustand $\tilde{x}$ in höchstens k Schritten erreichbar, wenn $\tilde{x}$ im Wertebereich des Operators enthalten ist.

Das ist für alle Zustände dann der Fall, wenn der Rang $[A^{k-1} B|\ldots|AB|B] = n$ ist. Die kleinste Zahl k, für die die obere Gleichung erfüllt ist, kann als *Erreichbarkeitsindex* μ bezeichnet werden. Allgemein läßt sich zeigen, daß bei einem n-dimensionalen dlz-System, deren Inputmatrix den Rang m hat, jeder Zustand, der vom Nullzustand aus erreichbar ist, in höchstens $n - m + 1$ Schritten erreicht werden kann, also $\mu \leq n - m + 1$ (vgl. dazu Ackermann, 1972). Allgemein wird auch formuliert: Ein n-dimensionales dlz-System ist erreichbar, wenn der Rang $[A^{n-1} B \mid \ldots \mid AB \mid B] = n$ ist. Für das n-dimensionale dlz-System wird die Matrix $[A^{n-1} B \mid \ldots \mid AB \mid B]$ *Erreichbarkeitsmatrix* genannt.

Das oben angeführte Beispielsystem hat eine Erreichbarkeitsmatrix mit einem Rang von 3 und ist somit erreichbar.

Kontrollierbarkeit

In vielen Fällen ist der Nullzustand eines Systems ein erwünschter Zustand, den es zu erreichen bzw. zu erhalten gilt. Das ist z.B. in den Fällen so, in denen mit Hilfe eines dlz-Systems Abweichungen von einem bestimmten Zustand eines Systems beschrieben werden. Deshalb bezieht sich die Kontrollierbarkeit von Systemen auf die Rückführbarkeit seiner Zustände zum Nullzustand.

Ein Zustand x_0 wird *kontrollierbar* genannt, wenn er in den Nullzustand überführt werden kann. Das bedeutet, daß für x_0 eine Inputfolge $u_0u_1 \ldots u_{k-1}$ existieren muß, so daß

$$0_X = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu_j$$

gilt.

Anders ausgedrückt heißt das, daß x_0 kontrollierbar ist, wenn eine Folge von $v_0v_1 \ldots v_{k-1}$ (mit $v_j = -u_j$) existiert, so daß

$$A^k x_0 = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bv^j,$$

oder wenn der Zustand $A^k x_0$ in k-Schritten erreichbar ist. Ein dlz-System wird *kontrollierbar* genannt, wenn es von jedem Zustand in den Nullzustand überführt werden kann. Allgemein ist ein n-dimensionales dlz-System kontrollierbar, wenn

$$\mathcal{W}(A^n) \subseteq \mathcal{W}([A^{n-1} B | \ldots | AB | B])$$

ist. Aus der Erreichbarkeit eines dlz-Systems folgt dessen Kontrollierbarkeit. Die Umkehrung gilt allerdings nicht. Aus der Kontrollierbarkeit eines dlz-Systems folgt nicht dessen Erreichbarkeit, sondern es muß die Invertierbarkeit der Systemmatrix als zusätzliche Bedingung hinzukommen, d.h. det $A \neq 0$. Ein erreichbares dlz-System mit det $A \neq 0$ ist auch steuerbar. Falls det $A = 0$ ist, gilt nur, daß jeder erreichbare Zustand kontrollierbar ist (Ackermann, 1972).

Bei dem Beispielsystem ist die Determinante von A gleich 0.0296. Es ist somit auch steuerbar.

Beobachtbarkeit

Wenn der Zustand x eines dlz-Systems nicht direkt gegeben ist, sondern lediglich die Ausgangsgröße $y(k) = Cx(k)$, dann stellt sich oft das Problem — besonders bei Kontrollaufgaben —, diesen Zustand x aus y zu bestimmen. Im vorliegenden Zusammenhang ist dies dann von Bedeutung, wenn den Pbn von dem System, das sie steuern sollen, nicht alle Zustände dargeboten werden. In diesem Fall sollte aber gewährleistet sein, daß das System beobachtbar ist.

Der Output für jede Inputfolge ω bei gegebenem Anfangszustand $\hat{x}$ ist bei dlz-Systemen bestimmt durch $\eta[\varphi(\hat{x},\omega)]$. Die *Beobachtbarkeit* einer dlz-

Systems bezieht sich nun darauf, daß für jedes Paar verschiedener Systemzustände $\hat{x}$ und $\tilde{x}$ mindestens eine Inputfolge existieren muß, die zu verschiedenen Outputwerten führt, also wenn es ein $\omega \in U^*$ gibt, so daß $\eta[\varphi(\hat{x},\omega)] \neq \eta[\varphi(\tilde{x},\omega)]$ für alle Paare verschiedener Systemzustände erfüllt ist. Als Output für eine Inputfolge der Länge l ergibt sich:

$$y(l) = C\varphi(\hat{x}, u_0 \ldots u_{l-1}) = CA^l\hat{x} + \sum_{j=0}^{l-1} CA^{l-j-1} Bu_j$$

In Analogie zur Kontrollierbarkeit läßt sich allgemein formulieren, daß ein dlz-System dann beobachtbar ist, wenn der Rang $[C' \mid A'C' \mid \ldots \mid (A')^{n-1}C'] = n$ ist, wobei C', A' die Transponierten der Matrizen C, A bezeichnen.

Der *Beobachtbarkeitsindex r* ist die kleinste Zahl, bei der Rang $[C' \mid A'C' \mid \ldots \mid (A')^{r-1}C'] = n$ erfüllt ist. Für beobachtbare dlz-Systeme gilt, daß $r \leq n - q + 1$ ist, wobei q den Rang von C bezeichnet.

Stabilität

Die Stabilität von Systemen ist eine Eigenschaft, die Auskunft darüber gibt, wie sich das System bei ständigem Nullinput verhält, d.h. bei $u(k) = 0$ für alle k. Ein dlz-System ohne Input bzw. mit Nullinput wird *autonomes System* genannt und sein Verhalten entsprechend *autonomes Systemverhalten* oder *autonome Bewegung*. Die Stabilität eines dlz-Systems gibt z.B. an, ob sich der Systemzustand bei einer Abweichung vom Nullzustand noch weiter davon entfernt oder wieder zum Nullzustand zurückkehrt oder keines von beiden. Auch im Zusammenhang mit der Verwendung dynamischer Systeme zur Konstruktion von Aufgaben für Pbn ist die Stabilität eines Systems nicht uninteressant. Nullinput bedeutet in den meisten Fällen, daß die Pbn nicht in das System eingreifen. Somit ist es interessant und aufschlußreich zu wissen, welche Konsequenzen sich daraus in bezug zur Aufgabenstellung ergeben. Beispielsweise, ob sich ein Systemzustand auch ohne Input bzw. Eingriff auf den gewünschten Systemzustand zubewegt.

Die Stabilität eines dlz-Systems ist an den Begriff des *Gleichgewichts* gebunden. Für ein dlz-System wird ein Zustand x^g Gleichgewicht genannt, wenn er sich unter einem Nullinput nicht ändert, d.h., wenn $x^g = Ax^g$ gilt. Sei x^g ein Gleichgewicht eines dlz-Systems mit der Zustandsübergangsfunktion φ. Wenn $\varphi_0(k)$ die autonome Bewegung $\varphi(x_0, 0^j)$ (mit 0^j als Folge von j-Nullen) für alle Anfangszustände x_0 zum Zeitpunkt k_0 bezeichnet, dann ist ein Zustand x^g ein *schwach stabiles Gleichgewicht*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ einige $\delta > 0$ existieren, so daß $\|x_0 - x^g\| < \delta$ impliziert, daß $\|\varphi_0(k) - x^g\| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$ ist.

Hingegen ist ein Zustand x^g ein *asymptotisches Gleichgewicht,* wenn einige $\delta > 0$ existieren, so daß $||x_0 - x^g|| < \delta$ impliziert, daß $||\varphi_0(k) - x^g|| \to 0$ bei $k \to \infty$. Schließlich ist ein Zustand x^g ein *instabiles Gleichgewicht,* wenn für jedes $\delta > 0$ ein Zustand x_0 existiert, so daß $||x_0 - x^g|| < \delta$, jedoch $||\varphi_0(k) - x^g|| \to l$, wobei $\delta < l \leq \infty$, bei $k \to \infty$. Dabei bezeichnet $||\ ||$ die euklidische Norm.

Ein dlz-System wird nun in dem Sinne stabil genannt, in dem der Nullzustand seines autonomen Systems stabil ist. Für dlz-Systeme läßt sich relativ leicht feststellen, in welchem Sinne es stabil ist: Ein dlz-System ist schwach stabil, wenn alle Eigenwerte λ_i der Systemmatrix A einen Betrag kleiner oder gleich 1 haben, also $|\lambda_i| \leq 1$. Ein dlz-System ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von A einen Betrag kleiner als 1 haben, d.h. $|\lambda_i| < 1$.

Da die Eigenwerte der Systemmatrix des Beispielsystems mit $\lambda_1 = 0.707$, $\lambda_2 = 0.309$ und $\lambda_3 = 0.135$ alle kleiner als 1 sind, ist es asymptotisch stabil.

Optimale Regelung und Kontrolle

Werden mithilfe dynamischer Systeme Aufgaben für Pbn konstruiert, dann besteht in den meisten Fällen die Aufgabe der Pbn in irgendeiner Form von kognitiver Regelung oder Steuerung dieser Systeme. Meist wird verlangt, bestimmte Größen (Regelgrößen) gezielt so zu beeinflussen, daß sie vorgegebenen Bedingungen genügen. Diese Bedingungen können in Form von anzustrebenden Größen (Führungsgrößen oder Sollwerten) gegeben sein, die von den zu regelnden Größen erreicht werden sollen. Sind die Führungsgrößen konstant, dann spricht man in der Regelungstheorie von *Festwertregelung* (vgl. dazu z.B. Ackermann, 1972). Oft gilt es bei dieser Art von Regelung, eine durch Störungen hervorgerufene Abweichung von der Führungsgröße (Sollwertabweichung) zu beseitigen. Ist die Führungsgröße variabel, und soll die Regelgröße entsprechend nachgeführt werden, spricht man von *Folgeregelung*. Die Aufgabe kann aber auch darin bestehen, einen bestimmten Endwert zu erreichen, was dann *Endwertregelung* genannt wird. Ist die anzusteuernde Führungsgröße der Nullzustand des Systems, spricht man auch von *Kontrolle* (siehe oben).

Die Vielfalt der Regelaufgaben kann durch Einführung von Nebenbedingungen noch erhöht werden. So kann beispielsweise der Input, mit dessen Hilfe die Regelung vorgenommen werden soll (Stellgröße), beschränkt werden. Das kann in Form der Beschränkung des Absolutwertes geschehen, also $|u(k)| \leq \delta$ für alle k, oder in Form von Beschränkung der Gesamtsumme, also $\Sigma |u| \leq \delta$.

Ein anderes wichtiges Merkmal einer Regelung hängt mit der Information zusammen, die Verwendung findet. Wie schon erwähnt wurde, enthält bei der Zustandsraumdarstellung der gegenwärtige Systemzustand alle Informationen für die Bestimmung des zukünftigen Verhaltens des Systems. Deshalb muß es auch möglich sein, den gesuchten Input mithilfe des jeweiligen Zustandes zu bestimmen, also $u(k) = f[x(k)]$. Dies führt zu einer Regelung über die *Rückführung des Zustandsvektors.* Sie wird als *closed-loop* oder *feedback* Regelung bezeichnet. Bei linearen Systemen ist der gesuchte feedback Input durch eine Linearkombination des Zustandsvektors gegeben:

$$u(k) = -Kx(k)$$

Im Gegensatz zur sogenannten *open-loop* Regelung, bei der aufgrund des Anfangszustandes die gesamte Inputfolge zur Erreichung des Zielzustandes berechnet wird, hat die *closed-loop* Regelung den Vorteil, daß Störungen, die während der Rückführung zum Nullzustand auftreten und den Zustand in eine unerwünschte Richtung ablenken, sofort mit berücksichtigt werden können.

Bei der Regelung wird die Bedeutung der Beobachtbarkeit von Systemen deutlich. Ist der Zustandsvektor nämlich nicht direkt gegeben, muß er erst durch Beobachtung ermittelt werden.

Eine wichtige Frage ist die Bewertung einer Regelung oder das Kriterium, nach dem geregelt werden soll. Gerade die damit verbundene Beurteilung der Güte einer Regelung ist im Zusammenhang mit Untersuchungen der kognitiven Steuerung dynamischer Systeme besonders wichtig. Bei einigen der bis jetzt durchgeführten Untersuchungen wurden aber leider keine klaren Führungsgrößen oder Kriterien vorgegeben, so daß auch die Frage nach der Güte einer Regelung nicht klar zu beantworten war und dann relativ willkürlich oder widersprüchlich gehandhabt wurde (siehe dazu die Beispiele).

In der Regelungstechnik ist als Kriterium ein quadratisches Gütekriterium weit verbreitet (vgl. z.B. Lapidus & Luus, 1967):

$$I[x(0),M] = \sum_{k=1}^{M} [x'(k)Qx(k) + u'(k-1)Ru(k-1)],$$

das bei einer optimalen Regelung minimiert wird. Hier gibt M die Anzahl der Schritte an, die zur Verfügung stehen. Q und R sind positiv semidefinite oder definit symmetrische Matrizen. Durch diese Matrizen können verschiedene Größen minimiert werden. Sind beide Matrizen nicht Null, dann wird diese Regelung hier QR-Regelung genannt. Sind beides beispielsweise Einheitsmatrizen, dann wird die ungewichtete Quadratsumme der Zustände und des Inputs minimiert. Ist die Matrix $R = 0$, dann werden entsprechend nur die quadratischen Abweichungen der Systemzustände vom Nullzustand bewertet bzw. minimiert. In diesem Fall wird hier von Q-Regelung gesprochen. Ist Q = 0, dann wird hier von der R-Regelung gesprochen. In diesem Fall wird nur der Energieaufwand, der zur Regelung benötigt wird, minimiert. Die optimalen Inputwerte werden bestimmt durch:

$$u(k) = -K_{M-k}x(k)$$
$$K_{M-k} = [B'(Q + J_{M-k-1})B + R]^{-1}B'(Q + J_{M-k-1})A$$
$$J_{m-k} = A'(Q + J_{M-k-1})(A - BK_{m-k})$$

wobei als Anfangsbedingung $J_0 = 0$ genommen wird.

Hat man zur Regelung unendlich viel Zeit, d.h. $M = \infty$, dann ergibt sich eine stationäre Lösung:

$$K = [B'(Q + J)B + R]^{-1}B'(Q + J)A$$
$$J = A'(Q + J)(A - BK).$$

Dadurch, daß die Matrix K konstant ist, kann auch eine feedback Regelung realisiert werden. In der Praxis benötigt man allerdings in vielen Fällen nicht wirklich unendlich viel Zeit, um eine stationäre Lösung zu bekommen. So ergibt sich für das Beispielsystem des Gasabsorbers bei rekursiver Berechnung der QR-Regelung bereits für $k \geq 6$ eine stationäre Lösung.

Oft ist nicht der Nullzustand die Führungsgröße, sondern ein Fließgleichgewicht x_g. Das ist ein Zustand, der sich bei einem konstanten Input nicht ändert:

$$x_g = Ax_g + Bu_g.$$

Man kann aber die Zustände durch:

$$z(k) = x(k) - x_g$$
$$m(k) = u(k) - u_g$$
$$z(0) = x(0) - x_g$$

so transformieren, daß $z_g = m_g = 0$.

Statt der Minimierung des quadratischen Gütekriteriums kann auch die Zeit minimiert werden, die zur Regelung benötigt wird. In diesem Fall spricht man von *zeitoptimaler Regelung*. Im Zusammenhang mit der Kontrollierbarkeit wurde bereits gezeigt, daß ein Zustand x_0 eines n-dimensionalen dlz-Systems kontrollierbar ist, wenn es eine Folge $v_0v_1 \ldots v_{0-1}$ (mit $v_j = -u_j$) gibt, so daß

$$A^n x_0 = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1}Bv_j$$

gilt.

Für die Regelung eines dlz-Systems mit einer regulären Inputmatrix gilt dann, daß jeder Zustand in höchstens einem Schritt zum Nullzustand zu überführen ist, also

$$0_x = Ax_0 + Bu_0$$

für alle x_0 erfüllt werden kann. Der gesuchte Input ist für diesen Fall gegeben durch:

$$u_0 = -B^{-1}Ax_0$$

Jetzt soll gezeigt werden, wie eine optimale Inputfolge für dlz-Systeme mit nur einem Input, d.h. der Rang der Inputmatrix ist 1, bestimmt werden kann. Bei Systemen mit mehr Inputgrößen ist die Berechnung analog. Für ein kontrollierbares n-dimensionales dlz-System mit nur einem Input ist jeder Zustand in höchstens n Schritten kontrollierbar. Für diesen Fall gilt:

$$A^n x_0 = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} b v_j = [A^{n-1}b \,|\, \ldots \,|\, Ab \,|\, b] \begin{bmatrix} v(0) \\ \vdots \\ v(n-1) \end{bmatrix}$$

Die gesuchte optimale Inputfolge $u_0 u_1 \ldots u_{n-1}$ ist nun durch die Komponenten des Vektors

$$[A^{n-1}b \,|\, \ldots \,|\, Ab \,|\, b]^{-1} A^n x_o = \begin{bmatrix} v(0) \\ \vdots \\ v(n-1) \end{bmatrix}$$

gegeben, also $-u_j = v_j$, mit $j = 0, \ldots, n - 1$. Durch dieses Verfahren bekommt man zu jedem Zustand x_0 eine Inputfolge, die diesen Zustand in den Nullzustand überführt. Wenn nicht der Nullzustand der gewünschte Zustand ist, sondern x_z, dann ergibt sich:

$$[A^{n-1}b \,|\, \ldots \,|\, Ab \,|\, b]^{-1}[x_z - A^n x_0] = \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix}$$

Nun wird ja bei einer Regelung durch Rückführung des Zustandsvektors verlangt, daß zu jedem Zeitpunkt k_i aufgrund des Systemzustandes $x(k_i)$ der optimale Input $u(k_i)$ in bezug auf den zu erreichenden Zustand x_z ermittelt wird.

Gesucht ist also eine Funktion $K_z : X \to U$, die zu jedem Systemzustand $\hat{x}$ den Input angibt, der zur Erreichung des Zielzustandes x_z optimal ist. Für den Fall einer regulären Inputmatrix, d.h. wenn jeder Zustand in einem Schritt erreicht werden kann, sind open-loop und closed-loop Regelung identisch. Für den zuletzt behandelten Fall ist die gesuchte Funktion für die cloosed-loop Regelung einfach:

$$u(k) = [10 \ldots 0][A^{n-1}b \,|\, \ldots \,|\, Ab \,|\, b]^{-1}[x_z - A^n x(k)].$$

Zwischen der Minimierung der Zeit und des quadratischen Gütekriteriums gibt es oft erhebliche Unterschiede hinsichtlich des optimalen Inputs. In Hübner (1987) sind die optimalen Inputwerte für den Gasabsorber bei zeitoptimaler, QR- und Q-Regelung graphisch dargestellt.

Ist in einem Experiment zur kognitiven Regelung eines System der optimale Input bekannt, dann bietet sich zur Beurteilung der Güte auch die Abweichung von der optimalen Regelung an. Dieses Kriterium wurde in Hübner (1987, 1988) verwendet.

Der bis jetzt dargestellte Formalismus ist ausreichend für eine präzise Konstruktion und Analyse von Aufgaben für psychologische Untersuchungen. In den nächsten beiden Abschnitten soll dessen Nützlichkeit anhand von Beispielen verdeutlicht werden.

Beispiel 1: Funke (1985 b)

Funke (1985 b) wählt als Darstellungsmittel den Formalismus deterministischer autoregressiver Prozesse. Diese Darstellungsart scheint aber für die beabsichtigten Zwecke wenig geeignet zu sein. So allein schon dadurch, daß der Input, der von den Pbn vorgenommen wird, keine Berücksichtigung findet, der Formalismus also lediglich zu autonomen Systemen führt, wie schon durch das Adjektiv „autoregressiv" angezeigt wird. Die von Funke (1985 b) verwendeten Systeme lassen sich nun ohne Schwierigkeiten in die hier favorisierte Zustandsraumdarstellung überführen. So hat das von ihm verwendete Grundsystem die Form:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} u(k).$$

Als Semantik wird folgende Zuordnung verwendet:

x_1 := Käfer,
x_2 := Wasserverschmutzung,
x_3 := Blätterzahl,
u_1 := Gift,
u_2 := Schädlingsfresser und
u_3 := Dünger,

wobei hier die Indizes die einzelnen Komponenten der entsprechenden Vektoren anzeigen. Auf diese Semantik und die vielleicht damit verbundene Problematik soll hier nicht näher eingegangen werden, sondern lediglich auf die mathematischen Aspekte des Systems. Da die Systemmatrix eine Diagonalmatrix ist, sieht man sofort, daß das System schwach stabil ist. Die

Aufgabe der Pbn bestand nach einer Lernphase laut Instruktion darin, den Ausgangszustand

$$x_0 = \begin{bmatrix} 200 \\ 3 \\ 5000 \end{bmatrix} \text{ zum Zielstand } x_z = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 10000 \end{bmatrix} \text{ zu steuern.}$$

Gegeben war also ein Systemsteuerungsproblem. Zur Steuerung standen den Pbn sechs Schritte zur Verfügung, wobei hinsichtlich des Inputs keine Einschränkungen gemacht wurden. Dieses System ist nach den oben angegebenen Kriterien steuerbar und, weil den Pbn alle Zustandskomponenten dargeboten wurden, auch (direkt) beobachtbar. Eine der von Funke (1985b) verwendeten Varianten des Grundsystems, die sich durch weniger Nullen in der System- und Inputmatrix auszeichnet, ist gegeben durch:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix} u(k).$$

Die Eigenwerte dieses Systems sind $\lambda_1 = 0.95 - 0.31\sqrt{-1}$, $\lambda_2 = 0.95 + 0.31\sqrt{-1}$ und $\lambda_3 = 1$. Auch dieses System ist somit schwach stabil. Allerdings zeigen die konjugiert komplexen Eigenwerte an, daß Systemteile gedämpft schwingen (vgl. z.B. Jacobs 1974). Auch ist das System steuerbar und beobachtbar. Beiden Systemen ist gemeinsam, daß nur ein Schritt benötigt wird, um einen beliebigen Zustand in einen beliebigen anderen zu überführen. Leider geht aus der Instruktion für die Pbn nicht hervor, ob von ihnen eine Festwert- oder Endwertregelung verlangt ist. Und auch die Methode, mit der die Regelung der Pbn bewertet wird, ist in dieser Hinsicht undifferenziert. Danach würde ein Pb, der den Zielzustand in einem Schritt erreicht und ihn dann hält, genauso beurteilt, wie ein Pb, der den Zielzustand beispielsweise erst nach fünf Schritten erreicht.

Hier soll nicht näher auf die Bewertungsmethode eingegangen werden (siehe dazu Funke, 1985b), jedoch zeigt dieses Beispiel, wie wichtig eine klare Zielvorgabe und ein geeignetes, damit verbundenes objektives Gütekriterium ist. Als Alternative wäre nun möglich, bei jedem Schritt den optimalen Input zu berechnen und die jeweilige Abweichung des Inputs der Pbn als Gütemaß zu verwenden. Doch auch diese Vorgehensweise ist nicht ganz problemlos. So ist nicht auszuschließen, daß es subjektiv unterschiedlich schwierige Systemzustände gibt. Da aber in einer üblichen Untersuchungssituation das System über eine Rückkopplung mit den Pbn verbunden ist, sind außer den Anfangszuständen die Zustände in der Regel für verschiedene Pbn verschieden.

Hier wird ein Mangel an experimenteller Kontrolle bei solchen Untersuchungen deutlich. Nach Vorgabe des Anfangszustandes hört für den Vl die

Kontrolle auf, und der jeweilige Pb erzeugt sich dann die Zustände selbst, auf die er reagiert. Dieses Problem kann z. B. dadurch umgangen werden, daß nach einer Lernphase den Probanden Zustände randomisiert dargeboten werden, und sie zu einem Input entsprechend der Zielvorgabe aufgefordert werden. Da bei einer Zustandsraumdarstellung die Kenntnis des jeweiligen Systemzustandes prinzipiell zur Berechnung des optimalen Inputs ausreicht, können so die Abweichungen von den Inputs, die die Pbn eingeben, als objektives Gütemaß verwendet werden. Die dargebotenen Zustände sind nun für alle Pbn gleich und unterliegen der vollständigen Kontrolle des Vl. Eine solche bzw. eine ähnliche Vorgehensweise wurde in den Arbeiten von Hübner (1987, 1988) gewählt.

Die Berechnung des optimalen Inputs für das oben angeführte Grundsystem und den Anfangszustand ergibt:

$$u(0) = \begin{bmatrix} 30 \\ -80 \\ 500 \end{bmatrix}, \text{ und für die Variante: } u(0) = \begin{bmatrix} -561 \\ -5080 \\ -59 \end{bmatrix} \text{(gerundet).}$$

Eine andere Art der Variation, die von Funke (1985b) vorgenommen wurde, betrifft eine zeitliche Verzögerung der Wirkung der Inputvariablen auf die Systemvariablen. Dies kann bei einer Zustandsraumdarstellung dadurch erreicht werden, daß Speicherzustände eingeführt werden. Das System erhält so eine höhere Dimension und eine Outputmatrix. Die zeitlich verzögerte Version des zweiten, der oben dargestellten Systeme ergibt so:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Die neu hinzugekommenen Zustandsvariablen nehmen die Werte der entsprechenden Inputvariablen für einen Zeitpunkt auf, um sie dann beim nächsten Zeitpunkt entsprechend auf die anderen Zustandsvariablen wirken zu lassen. Dadurch, daß die neuen Zustandsvariablen für die Pbn nicht direkt gegeben sind, ist das System erst nach zwei Schritten beobachtbar. Ebenso ist dieses System erst nach zwei Schritten erreichbar. Durch die Zustandsraumdarstellung wird auch deutlich, daß nun die ursprüngliche Angabe des Anfangs- und des Zielzustandes unvollständig ist, da ja über die beiden neuen Variablen nichts ausgesagt ist. Wenn nun, um die Aufgabe zu präzisieren, vereinbart wird, daß die beiden neuen Zustandsvariablen am Anfang Null sind und auch im Zielzustand Null sein sollen, gibt es immer noch unendlich viele optimale Lösungen für diese Aufgabe. Denn man hat das Gleichungssystem:

$$[x_2 - A^2x_0] = [B \,|\, AB] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

das nicht eindeutlig lösbar ist. Erst, wenn man beispielsweise festlegt, daß die dritte Komponente des Inputvektors im jeweils zweiten Schritt Null sein soll, ist eine eindeutige Lösung möglich. So ergibt sich für den hier festgelegten Anfangs- und Endzustand die optimale Inputfolge:

$$u(0) = \begin{bmatrix} -618.67 \\ -8893.33 \\ -64.87 \end{bmatrix}, \; u(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ist man also an einem eindeutigen objektiven Gütemaß in dem hier vorgeschlagenen Sinne interessiert, dann sollte man darauf achten, daß für die optimale Regelung eine eindeutige Lösung existiert und bei beabsichtigter Einzeldarbietung der Systemzustände, diese direkt für die Pbn beobachtbar sind.

Beispiel 2: Reichert und Dörner (1988)

In einer Arbeit von Reichert und Dörner (1988) wird ebenfalls ein dlz-System zur Konstruktion einer Regelaufgabe verwendet. Sie verwenden als Formalismus eine Input-Output Darstellung. In der Zustandsraumdarstellung läßt es sich schreiben als:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} u^*(k)$$

$$y(k) = [0 \; 0 \; 0 \; 1]x(k).$$

Dieses System dient in der Untersuchung als Modell des Verhaltens einer Kühlanlage. Die vierte Zustandskomponente x_4 spiegelt die Temperatur in der Kühlanlage wider. Damit die Werte plausiblen Temperaturen entsprechen, werden sie vor der Darbietung durch $x = x_4/7.5 - 4$ transformiert. Um eine Regelaufgabe für die Pbn zu konstruieren, wurde eine Störgröße eingeführt und als additive Konstante zur Temperatur hinzugefügt. Bei der hier verwendeten Zustandsraumdarstellung wurde sie als Konstante mit zur Eingabe hinzugenommen, d.h. $u^*(k) = u(k) + 56.667$. Als Anfangszustand war vorgegeben:

$$x(0) = [17.00 \; 62.30 \; 103.07 \; 139.79]'.$$

Das System ist erreichbar, kontrollierbar und beobachtbar. Jeder Zustand ist in höchstens 4 Schritten zu erreichen und zu beobachten. Die Eigenwerte des Systems sind $\lambda_1 = -0.364 - 0.483\sqrt{-1}$, $\lambda_2 = -0.364 + 0.483\sqrt{-1}$, $\lambda_3 = 0.814 + 0.395\sqrt{-1}$, $\lambda_4 = 0.814 - 0.395\sqrt{-1}$. Wegen der konjugiert komplexen Eigenwerte schwingt dieses System gedämpft. Ansonsten ist es asymptotisch stabil.

Wie wichtig die oben angeführten präzisen Konzepte aus der Systemtheorie sind, wird auch hier besonders bei den Kriterien der Regelung deutlich. Dazu schreiben Reichert und Dörner (1988):
„Die Vpn wurden nun instruiert, dieses Stellrad über 100 simulierte Zeittakte so einzustellen, daß im Kühlhaus möglichst schnell und dauerhaft eine Temperatur von +4° C herrscht."

Durch die Instruktion wird somit von den Probanden eindeutig eine zeitoptimale Regelung verlangt. Die hierfür optimale Lösung, d.h. die Inputwerte, die zu einer zeitoptimalen Regelung führen, werden von Reichert und Dörner aber nicht als optimal angegeben. Vielmehr geben sie als optimale Lösung einen konstanten Input von 23 an. Dies entspricht aber einer R-Regelung. Hierbei wird die Stellenergie minimiert, und man benötigt damit wesentlich länger als bei der zeitoptimalen Regelung.

Da jeder Zustand in mindestens 4 Schritten zu erreichen ist, würden prinzipiell 4 Eingaben ausreichen, um die gewünschte Temperatur zu erreichen. Allerdings haben Reichert und Dörner (1988) eine Eingabebeschränkung vorgegeben, so daß nur Inputwerte zwischen 0 und 200 zulässig sind. Deshalb ergibt sich hier eine zeitoptimale Regelung, wie sie von den Pbn gefordert wurde, durch folgende Inputwerte:

$$0.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 96.36,\ 85.58,\ 59.44,\ 24.89.$$

Daß man zuerst vier Zeitpunkte benötigt, um den Zustand zu beobachten, fällt hier mit der Tatsache zusammen, daß die vier ersten optimalen Inputs sowieso Null sind, man dadurch also keine Zeit „verschenkt". Acht Zeittakte sind also für die gewünschte Regelung ausreichend. Bei der angegebenen angeblich „optimalen" Regelung benötigt man dagegen mindestens 55 Zeitpunkte, um die gewünschte Temperatur zu erreichen.

Da die optimale Regelung bei der Auswertung der Daten keine Rolle gespielt hat, hat diese Verwechslung keine Konsequenzen. Dafür tritt dort aber eine erneute Verwechslung auf. Bei der Auswertung wird nämlich als Kriterium das der Q-Regelung verwendet, d.h. die Sollwertabweichung.

Abschließende Bemerkungen

In dieser Arbeit werden Methoden und formale Hilfsmittel aus der Systemtheorie zusammengestellt, die es erlauben, Aufgaben für Untersuchungen der kognitiven Steuerung dynamischer Systeme zu beurteilen bzw. zu konstruieren. Dabei wird Wert auf eine genaue mathematische Beschreibbarkeit und Analysierbarkeit der dazu verwendeten Systeme gelegt. Besonders geeignet sind dazu dlz-Systeme. Bei ihnen ist es relativ einfach möglich, die der Aufgabe entsprechende optimale Lösung zu berechnen. Damit wird eine weitgehende experimentelle Kontrolle möglich, die in vielen der bis jetzt in diesem Bereich durchgeführten Untersuchungen kaum gegeben ist.

Daß dlz-Systeme sich prinzipiell zur Konstruktion von Aufgaben eignen, ist durch deren Verwendung in einigen Untersuchungen gezeigt. Leider werden bei nicht allen Untersuchungen die besonderen Eigenschaften der dlz-Systeme ausgenutzt. Darauf hinzuweisen, ist ein wesentliches Anliegen dieser Arbeit.

Durch die behandelten Beispiele sollte demonstriert werden, wie präzise die Aufgaben beschrieben werden können und welche Ungenauigkeiten aufgetreten sind. Durch Vermeidung solcher Ungenauigkeiten kann man ausschließen, daß sie als Ursache für die oft inkonsistenten Ergebnisse in diesem Bereich angesehen werden können.

Abschließend muß aber zu den hier kritisch diskutierten Untersuchungen gesagt werden, daß sie sich dadurch auszeichnen, durch Verwendung von dlz-Systemen sich überhaupt erst einer präzisen Kritik zugänglich gemacht zu haben, was bei vielen anderen Untersuchungen in diesem Bereich leider nicht der Fall ist.

Summary

A recent approach to construct tasks for the investigation of problem-solving behavior is the computer simulation of dynamic systems. Since the mathematical properties of most of the systems used are unknown, the description of the task-environment is unsatisfactory. It is suggested that canonical formalisms which lead to systems with known properties and unique solutions be used. Particularly, discrete linear time-invariant systems are favored, and the respective results for examining their properties and computing their optimal solutions are compiled. The importance of the methods is demonstrated by the examination of systems already in use.

Literatur

Ackermann, J. (1972). *Abtastregelung*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Dörner, D. (1975). Wie Menschen eine Welt verbessern wollten. *Bild der Wissenschaft, 12*, 48–53.

Funke, J. (1985a). Problemlösen in komplexen computersimulierten Realitätsbereichen. *Sprache & Kognition, 3*, 113–129.

Funke, J. (1985b). Steuerung dynamischer Systeme durch Aufbau und Anwendung subjektiver Kausalmodelle. *Zeitschrift für Psychologie, 193*, 435–457.

Hübner, R. (1987). Eine naheliegende Fehleinschätzung des Zielabstandes bei der zeitoptimalen Regelung dynamischer Systeme. *Zeitschrift für Experimentelle und Angewandte Psychologie, 34*, 38–53.

Hübner, R. (1988). Die kognitive Regelung dynamischer Systeme und der Einfluß analoger versus digitaler Informationsdarbietung. *Zeitschrift für Psychologie, 196*, 161–170.

Jacobs, O. L. R. (1974). *Introduction to control theory*. Oxford: Clarendon Press.

Kalmann, R. E. (1957). *Optimal nonlinear control of saturating systems by intermittent action*. Wescon IRE Convention Record.

Kalman, R. R., Falb, P. L. & Arbib, M. A. (1969). *Topics in mathematical system theory*. New York: McGraw Hill.

Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Padulo, L. & Arbib, M. A. (1974). *System theory*. Philadelphia, London, Toronto: Saunders.

Reichert, U. & Dörner, D. (1988). Heurismen beim Umgang mit einem „einfachen" dynamischen System. *Sprache & Kognition, 7*, 12–24.

Anschrift des Verfassers: Dr. Ronald Hübner, Institut für Psychologie, Universität Regensburg, Universitätsstraße 31, D-8400 Regensburg.