Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie
1989, Band XXXVI, Heft 1, S. 57—71

Repräsentation dynamischer Strukturen durch lineare Systeme

Ronald Hübner

Universität Regensburg

Die Anwendung der linearen Systemtheorie setzt voraus, daß die Eingabe- und Ausgabemengen Moduln sind. Diese Voraussetzung ist bei der Modellierung physikalischer Systeme nicht problematisch, da die meisten physikalischen Größen extensiv meßbar sind. Anders ist die Situation bei der Modellierung psychologischer Systeme. Hier sind oft zumindest die Ausgabemengen psychologische Größen, die nicht ohne weiteres gemessen werden können, und somit der Nachweis ihrer Moduleigenschaft schwierig ist.

Eine Möglichkeit, trotz dieser Schwierigkeiten lineare Systemtheorie in der Psychologie anwenden zu können, bietet deren Kombination mit der axiomatischen Meßtheorie. Es kann gezeigt werden, daß sich für lineare Systeme mit einer skalaren Eingabe- und Ausgabegröße die Theorie des additiv verbundenen Messens so modifizieren läßt, daß sie sich zur Systemidentifikation eignet. Ein Anwendungsbeispiel im Zusammenhang mit der Lautheitsadaptation wird gegeben.

Einleitung

Zur Modellierung dynamischer Vorgänge werden in der Regel systemtheoretische Methoden verwendet. Ausgangspunkt ist dabei eine sogenannte „black box“, ein System, bei dem nur die Eingabe- und Ausgabegrößen direkt zu beobachten sind. Ziel der Modellierung ist, das Verhalten der „black box“ mit Hilfe eines formalen Modells und einer Menge von Systemzuständen zu beschreiben. Bei allgemein zeitdiskreten Systemen – und nur diese finden in dieser Arbeit Berücksichtigung – werden die Systemzustände durch Äquivalenzklassen von Eingabefolgen gebildet (vgl. Padulo & Arbib, 1974). Ausgangspunkt ist dabei die Ein-Ausgabe-Funktion der „black box“. Diese wird dann als formales diskretes System *realisiert.* Die praktische Durchführung einer solchen Systemrealisation ist aber nicht allgemein möglich, weil dazu meist der Vergleich der Ausgabe der „black box" bei unendlich vielen Eingaben erforderlich wäre. Um hier zu einer praktischen Durchführbarkeit zu gelangen, ist die Einführung zusätzlicher Restriktionen erforderlich, die zu linearen Systemen führen.

Mit diesen Restriktionen wird gefordert, daß die Eingabe- und Ausgabemengen Moduln über einem unitären Ring R sind und die beobachtbare Ein-Ausgabe-Funktion R-linear ist. Für viele Bereiche bringt es kaum zusätzliche Beschränkungen, führt aber oft zu besserem Verständnis, wenn man statt den Moduln die geläufigeren Vektorräume fordert und Linearität statt der R-Linearität, was im folgenden geschehen soll.

Für die Ingenieurswissenschaften bedeutet die Forderung der Vektorraumeigenschaft für die Eingabe- und Ausgabemengen meist keine große Einschränkung. Praktisch wird sie erfüllt, indem die physikalischen Eingabe- und Ausgabegrößen z.B. extensiv gemessen werden, und die Meßwerte dann als Ausgangspunkt dienen. Die Linearität der Ein-Ausgabe-Funktion kann dann relativ einfach empirisch getestet werden. Vor dem Realisationsproblem steht also das Meßproblem, das aber bei physikalischen Systemen in der Regel leicht zu bewältigen ist.

Anders sieht es in der Psychologie aus. Hier können die Größen oft nicht einfach gemessen werden. So haben psychophysische Systeme zwar als Eingabe ebenfalls physikalische, als Ausgabe jedoch psychologische Größen. Letztere extensiv zu messen, ist aber in den meisten Fällen nicht möglich. Hinzu kommt, daß die psychologischen Größen nicht direkt beobachtbar sind. Deshalb kann man auch die Funktion, die als Ausgangspunkt für die Systemrealisation dient, nicht direkt ermitteln.

Bei einigen Versuchen, trotzdem systemtheoretischen Methoden in der Psychologie anzuwenden, wurde von den Probanden verlangt, Zahlen zu nennen, die der psychologischen Ausgabegröße entsprechen. Diese wurden dann als Meßwerte interpretiert und entsprechend verwendet (vgl. z.B. Gregson, 1983; 1984). Vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet ist dieses Vorgehen sehr unbefriedigend. Deshalb wird in dieser Arbeit ein meßtheoretischer Ansatz verfolgt. Bis jetzt hat die Meßtheorie noch keine Konzepte entwickelt, die eine Repräsentation dynamischen Verhaltens erlauben. Die vorliegende Arbeit verwendet daher den Ansatz des additiv verbundenen Messens in einer Weise, daß dies möglich wird. Dabei werden Bedingungen spezifiziert, die ein Messen der Eingabe- und Ausgabegrößen erlauben und zusätzlich Linearität der Ein-Ausgabe-Funktion garantieren. Ist diese identifiziert, kann sie relativ einfach durch ein lineares System realisiert werden. Ferner führt diese Konzeption zum auch sonst in der Psychologie üblichen Paarvergleich.

Diskrete zeitinvariante lineare Systeme

In diesem Abschnitt werden einige Konzepte aus der Systemtheorie dargestellt, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Da hier ausschließlich diskrete zeitinvariante lineare Systeme relevant sind, werden die ersten beiden Attribute im folgenden der Einfachheit halber nicht mehr explizit erwähnt. Bei der Darstellung der Konzepte wird Bezug genommen auf Kalman, Falb und Arbib (1969) und Padulo und Arbib (1974).

Ein lineares System wird hier als Struktur $\Sigma = \langle X, \mathbf{A}, U, \mathbf{B}, Y, \mathbf{C} \rangle$ definiert. Dabei sind U, X, Y Vektorräume und $\mathbf{A} : X \rightarrow X$, $\mathbf{B} : U \rightarrow X$ und $\mathbf{C} : X \rightarrow Y$ lineare Abbildungen, so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \text{ und} \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}\mathbf{x}_t \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in X \text{ und } \mathbf{u} \in U. \end{aligned}$$

U wird *Eingabemenge, X Zustandsmenge* und *Y Ausgabemenge* genannt. Entsprechend heißt **B** *Eingabefunktion,* **A** *Zustandsübergangsfunktion* und **C** *Ausgabefunktion.* $t \in Z$ ist ein *Zeitindex.*

Die Menge aller Eingabefolgen ω ist: $U^* = \{\omega \mid \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i \in U\}$. Die *Nullzustandsantwort* δ_0 von Σ ist gegeben durch die Funktion[1])

$$\delta_0 : \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0 \rightarrow \sum_{l=0}^{k} \mathbf{C}\mathbf{A}^l, \mathbf{B}\mathbf{u}_l.$$

Ausgangspunkt für eine Systemrealisation ist nun eine Ein-Ausgabe-Funktion $f : U^* \rightarrow Y$, die zu jeder Eingabefolge ω die entsprechende Ausgabe y angibt. Die Aufgabe bei der Systemrealisation besteht darin, die drei linearen Operatoren **A, B,** und **C** zu identifizieren, so daß $\delta_0 = f$ ist. Dazu muß als erstes U^* zu einem Vektorraum gemacht werden, denn nur dann kann f linear und eine Identifikation möglich sein. Um dies zu erreichen wird die Tatsache genutzt, daß $f(\omega)$ sich nicht ändert, wenn vor ω eine beliebige Folge von Nullen gehängt wird. Diese modifizierte Menge von Inputfolgen wird durch $U^\#$ bezeichnet. Durch geeignete Definitionen von Operationen kann $U^\#$ relativ einfach zu einem Vektorraum gemacht werden (vgl. Padulo & Arbib, 1974).

Ist nun eine lineare Funktion $f : U^\# \rightarrow Y$ gegeben, dann kann gezeigt werden, daß es ein minimales lineares System

$$\Sigma = \langle X, \mathbf{A}, U, \mathbf{B}, Y, \mathbf{C} \rangle,$$

1) Die Indizes der Eingabefolgen sind hier aus technischen Gründen in umgekehrter Reihenfolge als sonst üblich.

gibt, so daß gilt:

$$f(\mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{CA}^l, \mathbf{Bu}_l.$$

Σ ist dabei in dem Sinne minimal, daß der Zustandsraum X von Σ die geringst mögliche Anzahl von Dimensionen hat. Gibt es mehrere minimale lineare Systeme, dann sind sie isomorph zueinander.

Dieses Ergebnis gibt keine Hinweise, wie Σ praktisch zu berechnen ist. Es läßt sich aber ein Algorithmus angeben, wenn irgend eine Beschränkung N hinsichtlich der Dimension von Σ gegeben ist. Dazu wird $\langle \omega \rangle$ für alle $\omega \in U^*$ definiert durch:

$$\langle \omega \rangle = \begin{bmatrix} f(\omega) \\ f(\omega, 0) \\ \vdots \\ f(\omega, 0^{N-1}) \end{bmatrix}$$

wobei mit 0^N eine Folge von N Nullen gemeint ist. Wenn U die Basis $e_1, \ldots, e_m$ hat, wählt man eine Basis für den Raum, der durch folgende Vektoren aufgespannt wird:

$$\mathcal{K}_N = [\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_m \rangle, \langle e_1, 0 \rangle, \ldots, \langle e_m, 0 \rangle, \ldots, \langle e_1, 0^{N-1} \rangle, \ldots, \langle e_m, 0^{N-1} \rangle]$$

Bestehe diese Basis aus den Vektoren $\langle \omega_1 \rangle \ldots \langle \omega_{n'} \rangle$ mit $n' \leq N$, und sei $[\omega]$ der Spaltenvektor, dessen Komponenten die Koeffizienten von $\langle \omega \rangle$ in Hinsicht auf diese Basis sind. Dann ist Σ in Hinsicht auf diese Basis definiert durch die Matrizen:

$$\begin{aligned} A_N &= [[\omega_1, 0], \ldots, [\omega_{n'}, 0]] \\ B_N &= [[e_1], \ldots, [e_m]] \\ C_N &= [f(\omega_1), \ldots, f(\omega_{n'})]. \end{aligned}$$

Dieser Realisationsalgorithmus wird nun an einem Beispiel verdeutlicht. Dazu wird eine Ein-Ausgabe-Funktion mit skalaren Eingabe- und Ausgabegrößen genommen. Als Basis e_1 wird die Standardbasis verwendet. Es sei bekannt, daß eine dreidimensionale Realisation existiert. Dann ist

$$\mathcal{K}_3 = \begin{bmatrix} f(1) & f(1, 0) & f(1, 0, 0) \\ f(1, 0) & f(1, 0, 0) & f(1, 0, 0, 0) \\ f(1, 0, 0) & f(1, 0, 0, 0) & f(1, 0, 0, 0, 0) \end{bmatrix} = [\langle 1 \rangle \ \langle 1, 0 \rangle \ \langle 1, 0, 0 \rangle].$$

Sei nun angenommen, daß sich folgende speziellen Werte ergeben:

$$\mathcal{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -17 \\ 5 & -17 & 61 \end{bmatrix}.$$

Für diese Matrix wird nun eine Basis gesucht. In diesem Fall ist sie $\langle 1 \rangle$ und $\langle 10 \rangle$, da die dritte Spalte linear abhängig ist mit $\langle 100 \rangle = 2\langle 1 \rangle - 3\langle 10 \rangle$. Nach dem Realisationssatz ist $[\omega]$ der Spaltenvektor $[\chi_1, \chi_2]'$, so daß $\langle \omega \rangle = \chi_1\langle 1 \rangle + \chi_2\langle 10 \rangle$. Als Lösung ergibt sich:

$$\mathbf{A} = \quad [[1,0],[1,0,0]] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \quad [[e_1]] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \quad [f(1), f(1, 0)] = [1, -1].$$

Bei der praktischen Durchführung von Systemrealisationen wird in der Regel die Dimension des Zustandsraumes nicht von vornherein bekannt sein. Trotzdem kann in vielen Fällen eine Realisation erfolgen. $\mathcal{K}$ wird iterativ solange vergrößert, bis $\mathcal{K}_n$ und $\mathcal{K}_{n+1}$ den selben Rang haben. Dann wird eine Basis für $\mathcal{K}_n$ gesucht, und die Realisation ist gesichert.

Dieser Formalismus führt zur Kalmanschen Zustandsraumdarstellung von Systemen. Bei dieser Darstellung reicht es aus, den jeweiligen Zustand des Systems und die momentane Eingabe zu kennen, um die nächste Ausgabe zu berechnen. Der mathematische Teil, der zu einer Realisation führt, ist dabei relativ einfach. Schwieriger dürfte in den meisten Fällen die Überprüfung der Linearität und die Messung der Ausgabegröße sein. Dies gilt insbesondere für psychologische Anwendungen. Um hier zu Lösungen zu kommen, werden Konzepte aus der axiomatischen Meßtheorie herangezogen. Zumindest für einige Klassen von Systemen mit skalaren Eingabe- und Ausgabegrößen können interessante Verbindungen mit der Systemtheorie aufgezeigt werden.

Meßtheorie

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie bestimmte lineare Funktionen durch ein lineares System realisiert werden können. Dabei wurden allgemein vektorielle Eingabe- und Ausgabegrößen erlaubt. Im folgenden wird die Betrachtung eingeschränkt auf lineare Systeme mit *skalaren* Eingabe- und Ausgabegrößen. Durch diese Restriktion wird es ermöglicht, die Theorie des additiv verbundenen Messens so zu modifizieren, daß eine empirische binäre Relation auf einer Menge von Eingabefolgen zu einer numerischen Repräsentation führt, die dann als lineares System realisiert werden kann. Um diesen Weg aufzuzeigen, müssen vorab noch einige Konzepte des additiv verbundenen Messens eingeführt werden. Der Formalismus wird dabei von Krantz, Luce, Suppes und Tversky (1971) übernommen. Dort sind auch die Beweise der Ergebnisse nachzulesen, wenn nicht anders angegeben.

Additive Repräsentation von n-Komponenten

Bei den meisten Anwendungen des additiv verbundenen Messens in der Psychologie wurden lediglich zwei Komponenten berücksichtigt. So etwa die Höhe und Breite von Rechtecken bei der Messung ihrer wahrgenommenen Flächengröße (vgl. Lukas, 1987). Eine Erweiterung auf Strukturen mit mehr als zwei Komponenten ist aber theoretisch einfach. Ausgangspunkt ist eine Ordnungsrelation $\gtrsim$ auf dem Mengenprodukt $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Es werden also n Komponenten zugelassen. Das Mengenprodukt zusammen mit der Ordnungsrelation ist eine algebraische Struktur. Für diese Struktur werden nun Eigenschaften spezifiziert, die zu einer additiven Repräsentation führen. D.h. Eigenschaften, welche die Existenz reellwertiger Funktionen (Skalen) ϕ_i auf A_i, $i \in N$, mit $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, garantieren, so daß für alle a_i, $b_i \in A_i$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_n) \gtrsim (b_1, \ldots, b_n) \; gdw \sum_{i=1}^{n} \phi_i(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(b_i).$$

Ferner soll gelten, daß die Funktionen $\{\phi_i\}$ eindeutig bis auf positiv lineare Transformationen der Art:

$$\phi'_i = \alpha\phi_i + \beta_i$$

sind, mit $\alpha > 0$ und β_i, $i \in N$.

Damit eine solche Repräsentation möglich ist, wird als erstes gefordert, daß $\gtrsim$ eine schwache Ordnung ist, d.h. konnex und transitiv. Ferner soll die Unabhängigkeit gelten. Eine binäre Relation $\gtrsim$ auf dem Mengenprodukt $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ ist *unabhängig* gdw für jedes $M \subset N$, die Ordnung $\gtrsim_M$, die durch $\gtrsim$ auf $\times_{i \in M} A_i$ für fest gewählte $a_i \in A_i$, $i \in N - M$ induziert wird, nicht von der speziellen Wahl der a_i abhängt. Man kann zeigen, daß wenn $\gtrsim$ eine schwache Ordnung ist, dann auch $\gtrsim_M$.

Als nächstes wird die *eingeschränkte Lösbarkeit* gefordert. D.h. daß für alle $i \in N$ gilt, wenn

$$(b_1, \ldots, \bar{b}_i, \ldots, b_n) \gtrsim (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \gtrsim (b_1, \ldots, \underline{b}_i, \ldots, b_n)$$

dann gibt es ein $b_i \in A_i$, so daß

$$(b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n) \sim (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n).$$

Mit $\bar{a}$ bzw. $\underline{a}$ ist dabei das größte bzw. kleinste Element der Menge A gemeint.

Weiter soll gelten, daß jede strikt beschränkte Standardfolge endlich ist. Eine Standardfolge ist dabei folgendermaßen definiert: Sei $\gtrsim$ eine unabhängige schwache Ordnung auf $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Für eine beliebige Menge M aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist eine Menge $\{a_i \mid a_i \in A_1, i \in M\}$ eine Standardfolge (der Komponente 1), gdw es p, q in irgend einer anderen

Komponente A_k, $k \in N$, $k \neq 1$, gibt, so daß nicht $(p \sim_k q)$ und für alle i, $i + 1 \in M$, $a_i p \sim_{1k} a_{i+1} q$. Eine entsprechende Definition gilt für die anderen Komponenten.

Da die Ordnung unabhängig ist, bezeichnet $\sim_i$ die, durch $\gtrsim$ induzierte Äquivalenzrelation auf A_i bei beliebigen, aber festen Elementen der anderen Komponenten. Die Relation $\sim_{ij}$ ist entsprechend als induzierte Äquivalenzrelation auf $A_i \times A_j$ definiert.

Schließlich müssen mindestens drei Komponenten wesentlich sein, wobei eine Komponente A_i *wesentlich* ist, gdw es $a, b \in A_i$ und $p \in A_j$, $i, j \in N$, $i \neq j$, gibt, so daß nicht $ap \sim_{ij} bp$.

Die Festlegung auf $n \geq 3$ ergibt sich daraus, daß bei weniger als 3 Komponenten zusätzlich die Doppelaufhebung gefordert werden muß (vgl. Krantz et al., 1971). Die durch diese angeführten Eigenschaften spezifizierten Strukturen werden *n-Komponenten additiv verbundene Strukturen* genannt.

Endliche identische Komponentenmengen

Von den n-Komponenten additiv verbundenen Strukturen ist für das hier verfolgte Ziel besonders der Spezialfall interessant, bei dem die Mengen identisch sind, d.h. $\langle A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \gtrsim \rangle$ mit $A_i = A_j$. Diese Strukturen ermöglichen, den Index als *Zeitindex* zu interpretieren. Ferner können Beziehungen zwischen den einzelnen Skalen betrachtet werden. So kann untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Skalen proportional zueinander sind. Dies ist deshalb interessant, weil dann eine Repräsentation möglich ist, bei der nur noch eine Skala vorkommt, und die Unterschiede zwischen den Komponenten durch Proportionalitätskonstanten repräsentiert sind:

$$\Phi[(a_1, \ldots, a_n)] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(a_i)$$

Koopmans (1960) hat mit solchen Strukturen zeitliche Folgen von Konsumgütern repräsentiert. u wird als eine Nutzenfunktion auf A angesehen und λ_i als sogenannter *Discountfaktor.* Koopmans (1960) betrachtet in seiner Arbeit allerdings unendlich Komponentenfolgen. Krantz et al. (1971) haben seine Ergebnisse auch auf den endlichen Fall übertragen.

Dafür, daß alle ϕ_i proportional zu u sind, ist eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Standardfolgen invariant über die Komponenten sind. D.h., wenn $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(j)}$ eine Standardfolge in einer Komponente ist, dann dürfen keine ungleichen Abstände in einer anderen Komponente auftreten. Es reicht aus, wenn dies für drei-Glied Standardfolgen gefordert wird. Wenn a_i, b_i, c_i eine Standardfolge ist und $a_i = a_j$, $b_i = b_j$, $c_i = c_j$, dann darf a_j, b_j, c_j nicht ungleich abständig sein. Dies wird formal definiert durch die *Standardfolgenbedingung*. Eine n-Komponenten additiv verbundene Struktur $\langle A^n, \gtrsim \rangle$ erfüllt die *Standardfolgenbedingung* gdw für alle Standardfolgen a_i, b_i, c_i alle verschiedenen j, k, $n \geq j$, $k \geq 1$ und alle a_j, b_j, c_j, p_k, $q_k \in A$ gilt: wenn $a_i = a_j$, $b_i = b_j$, $c_i = c_j$ und $a_j p_k \sim_{jk} b_j q_k$ dann $b_j p_k \sim_{jk} c_j q_k$.

Hat man nun mit $\langle A^n, \gtrsim \rangle$ eine n-Komponenten additiv verbundene Struktur für die die Standardfolgenbedingung gilt, dann gibt es eine Intervallskala u auf A und von Null verschiedene Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so daß für alle $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_n) \gtrsim (b_1, \ldots, b_n) \text{ gdw} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(b_i).$$

Die λ_i sind eindeutig bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten.

Eine spezielle Form von λ_i ist gegeben durch die exponentielle Form $\lambda_i = \lambda^{i-1}$, wobei $\lambda > 0$ (gewöhnlich auch $\lambda < 1$). Dies entspricht der qualitativen Eigenschaft *Stationarität,* wie sie von Koopmans (1960) zuerst für unendliche Komponentenfolgen formuliert wurde, und von Krantz et al. (1971) auf den endlichen Fall übertragen wurde. Eine binäre Relation $\gtrsim$ auf A^n, $n \geq 3$, ist *stationär* gdw es ein $x \in A$ gibt, so daß für alle $a^{(1)}, \ldots, a^{(n-1)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(n-1)} \in A$ gilt:

$$(a^{(1)}, \ldots, a^{(n-1)}, x) \gtrsim (b^{(1)}, \ldots, b^{(n-1)}, x)$$

gdw

$$(x, a^{(1)}, \ldots, a^{(n-1')} \gtrsim (x, b^{(1)}, \ldots, b^{(n-1')}.$$

Wenn für eine n-Komponenten additiv verbundene Struktur die Stationarität gilt, dann gibt es eine Intervallskala u auf A und eine eindeutige Zahl $\lambda > 0$, so daß für alle $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_n) \gtrsim (b_1, \ldots, b_n) \quad \text{gdw} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} u(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} u(b_i).$$

Additive Repräsentation unendlich vieler Komponentenmengen

Die Spezialisierung der n-Komponenten additiv verbundenen Strukturen auf identische Komponentenmengen ist ein Schritt hin zur Repräsentation zeitlicher Strukturen. In diesem Abschnitt werden Strukturen mit unendlich vielen Komponentenmengen oder einfach unendliche verbundene Strukturen betrachtet. Wie schon erwähnt, wurden Repräsentationen für solche Strukturen mit identischen Komponenten bereits von Koopmans

(1960) (siehe auch Koopmans, Diamond & Williams, 1964) angegeben. Allerdings wurde in diesen Arbeiten die Existenz einer Nutzenfunktion u auf der Komponentenmenge A bereits vorausgesetzt. In einer späteren Arbeit hat Koopmans (1972) die Theorie so umgeformt, daß eine Ordnung und nicht mehr eine Nutzenfunktion Ausgangspunkt für eine Repräsentation ist. Alle Arbeiten verwenden aber bei der Formulierung der Repräsentationsbedingungen die topologischen Annahmen von Debreu (1960).

Hier wird die Betrachtung der unendlichen verbundenen Strukturen in der algebraischen Axiomatisierung von Krantz et al. (1971) fortgeführt. Die entsprechenden Beweise können in Hübner (1988) nachgelesen werden.

Überträgt man die oben angeführten Eigenschaften der n-Komponenten additiv verbundenen Strukturen auf die unendlichen verbundenen Strukturen, dann sind für die Definition der Unabhängigkeit und die der eingeschränkten Lösbarkeit geringe Modifikationen nötig (vgl. Hübner, 1988). Unendlich verbundene Strukturen mit diesen Eigenschaften sollen hier *I-Komponenten-Strukturen* genannt werden.

Für I-Komponenten-Strukturen läßt sich keine allgemeine Repräsentation angeben. Jedoch kann gezeigt werden, daß für bestimmte Teilstrukturen Repräsentationen existieren, oder wenn zusätzliche Eigenschaften verlangt werden. Eine dieser zusätzlichen Eigenschaften ist die Stationarität. Auch diese Eigenschaft muß für I-Komponenten-Strukturen modifiziert werden. Sei $I = \{1,2, \ldots\}$. Dann ist eine binäre Relation $\gtrsim$ auf A^I *stationär* gdw es ein $x \in A$ gibt, so daß

$$(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots) \gtrsim (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots,) \text{ gdw } (x, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots) \gtrsim (x, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots)$$

für alle $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots), (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots) \in A^I$.

Hier bedeutet die Stationarität also, daß sich die Ordnung zwischen zwei Komponentenfolgen nicht ändert, wenn bei beiden durch ein gleiches Element alle anderen Glieder um einen Platz nach hinten verschoben werden.

Koopmans (1960) hat gezeigt, daß wenn zusätzlich die Stationarität gefordert wird, es eine Repräsentation für alle beschränkten Komponentenfolgen gibt. Eine Komponentenfolge (a_i) ist *beschränkt*, gdw es $\underline{a}, \bar{a} \in A$ mit $\underline{a} \gtrsim_1 \bar{a}$ gibt, so daß

$$\underline{a} \gtrsim_i a_i \gtrsim_i \bar{a} \text{ für alle } i = 1, 2, \ldots .$$

Die Repräsentation, wie sie von Koopmans (1960) für stationäre I-Komponenten-Strukturen $\langle A^I, \gtrsim \rangle$ für die Menge der beschränkten Folgen angegeben wurde, führt zu einer Intervallskala u auf A und einer eindeutigen Zahl $0 < \lambda < 1$, so daß

$$\Phi[(a_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} u(a_i)$$

ordnungserhaltend ist.

Hat man Komponentenmengen, die ein größtes und ein kleinstes Element enthalten – dies wurde durch die Forderung der nur eingeschränkten Lösbarkeit erlaubt – dann gilt die Repräsentation für die gesamte Struktur.

Repräsentation durch lineare Systeme

In diesem Abschnitt wird schließlich der Zusammenhang zwischen I-Komponenten-Strukturen und linearen Systemen hergestellt. Dies wird dadurch erreicht, daß die lineare Funktion, die den Ausgangspunkt für eine Realisation durch ein lineares System Σ bildet, durch die Repräsentation einer I-Komponenten-Struktur definiert wird. Die Repräsentation gelingt dabei nur für bestimmte Teilmengen oder bei bestimmten Eigenschaften der I-Komponenten-Struktur, wie schon gezeigt wurde. Im folgenden wird ein lineares System Σ auch durch seine drei Matrizen bezeichnet, also $\Sigma = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle$. Die Eingabemenge ist hier die Menge der Skalenwerte der einzelnen Komponenten. Die Ausgabemenge ist die Menge der Skalenwerte der Tupel. Da Ein- und Ausgabe skalare Größen sind, benötigt man als Ein- und Ausgabeoperatoren nur Vektoren, so daß hier nur Systeme der Art $\Sigma = \langle \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ betrachtet werden.

Bei den I-Komponenten-Strukturen $\langle A^I, \gtrsim \rangle$ soll hier der Index i der Komponentenfolgen als Zeitindex t interpretiert werden, so daß

$$(a_0, a_1, \ldots) = (a_t, a_{t-1}, \ldots).$$

Gilt zusätzlich die Standardfolgenbedingung, dann werden solche Strukturen *dynamische Strukturen* genannt.

Die Korrespondenz zu den Eingabefolgen eines linearen Systems wird dadurch hergestellt, daß die Skalenwerte der Komponenten als Eingabemenge verwendet wird. Unendliche Eingabefolgen korrespondieren mit den Folgen der entsprechenden Skalenwerte. Die endlichen Eingabefolgen korrespondieren mit der Folge der entsprechenden Skalenwerte, wobei der Rest der Komponentenfolgen mit Nullen aufgefüllt wird:

$$u_0, u_1, \ldots, u_k \Leftrightarrow (u(a_t), u(a_{t-1}), \ldots, u(a_{t-k}), 0, 0, \ldots).$$

Als erstes werden jetzt solche Strukturen betrachtet, bei denen nur die ersten $n \geq 3$ Komponenten wesentlich sind. In bezug auf Systeme bedeutet das, daß nur die letzten n Eingaben einen Einfluß auf die Ausgabe des Systems haben. Für solche Strukturen gilt, daß es eine Intervallskala u und ein lineares System $\Sigma = \langle \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \rangle$ gibt, so daß für alle $(a_t, a_{t-1}, \ldots)$, $(b_t, b_{t-1}, \ldots) \in A^I$ gilt:

$$(a_t, a_{t-1}, \ldots) \gtrsim (b_t, b_{t-1}, \ldots) \text{ gdw } \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{c}'\mathbf{A}^i\mathbf{b}u(a_{t-i}) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{c}'\mathbf{A}^i\mathbf{b}u(b_{t-i}).$$

Der Beweis ist einfach und kann in Hübner (1988) nachgelesen werden. Hier soll die Repräsentation anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. Angenommen, man hat eine dynamische Struktur, bei der nur die ersten 3 Komponenten wesentlich sind. Wenn für $u(a_{t-i})$ u_i geschrieben wird, dann läßt sich die meßtheoretische Repräsentation angeben durch:

$$\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

Wird der Realisationsalgorithmus angewendet, wie er oben dargestellt wurde, führt das zu dem linearen System:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_t$$
$$y_t = [\lambda_0 \; \lambda_1 \; \lambda_2] \; \mathbf{x}_t.$$

Als nächstes werden nun stationäre dynamische Strukturen betrachtet. Dafür gibt es eine Intervallskala u und ein lineares System $\Sigma = \langle \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, so daß für alle $(a_t, a_{t-1}, \ldots)$, $(b_t, b_{t-1} \ldots) \in A^I$ gilt:

$$(a_t, a_{t-1}, \ldots) \gtrsim (b_t, b_{t-1}, \ldots) \text{ gdw} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{c}' \mathbf{A}^i \mathbf{b} u(a_{t-i}) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{c}' \mathbf{A}^i \mathbf{b} u(b_{t-i}).$$

Diese Repräsentation führt zu eindimensionalen Systemen. Da hier $\langle A^I, \gtrsim \rangle$ eine stationäre I-Komponenten-Struktur ist, gilt nach dem oben gezeigten die Repräsentation:

$$\Phi[(a_t, a_{t-1}, \ldots)] = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u(a_{t-i}) \tag{1}$$

mit $0 < \lambda < 1$. Nun wird der *Backshift-Operator* $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} u_t = u_{t-1}$$

eingeführt, dessen Hintereinanderausführung als Potenz geschrieben wird:

$$\mathcal{B}^p u_t = u_{t-p}.$$

Wird nun y_t für $\Phi[(a_t, a_{t-1}, \ldots)]$ geschrieben, dann steht für (1)

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathcal{B}^i u(a_{t-i}).$$

Da $\lambda < 1$ gilt, ist in dieser Gleichung eine konvergierende Potenzreihe enthalten. Mit Hilfe der z-Transformation läßt sich deshalb zeigen, daß die unendliche Reihe umgeformt werden kann, so daß:

$$y_t = \frac{1}{1 - \lambda \mathcal{B}} u\,(a_t).$$

Dies läßt sich schreiben als

$$y_t = u(a_t) + \lambda y_{t-1}.$$

Die Realisation durch ein dynamisches System ist schließlich:

$$x_{t+1} = \lambda x_t + u_t$$
$$y_t = x_t.$$

Man sieht, daß die Zustände skalare Größen sind.

Die hier angeführten Repräsentationen durch lineare Systeme sind nur Spezialfälle. Jedoch sind sie praktisch durchaus relevant, wie im nachfolgenden Anwendungsbeispiel gezeigt wird.

Anwendungsbeispiel

In diesem Abschnitt wird kurz ein Experiment geschildert, bei dem Teile der hier vorgestellten theoretischen Überlegungen angewendet wurden. Eine ausführliche Beschreibung ist in Hübner (1988) angegeben. Mit dem Experiment sollte die Dynamik der Lautheitsadaptation untersucht werden. Als Eingabemenge wurden Sinustöne (3000 Hz) mit verschiedenen Intensitäten (50, 60, 66 dB SPL) verwendet. Als Struktur wurde eine I-Komponenten-Struktur angenommen, bei der nur die ersten 3 Komponenten wesentlich sind. Mit den 3 Intensitätsausprägungen ergaben sich 27 Reizfolgen und damit $27^2 = 729$ Paare (a, b), die im Paarvergleich beurteilt werden mußten. Um zu einer Reduktion der Paarvergleiche zu kommen, wurden einmal Paare mit identischen Komponenten (a, a) nicht dargeboten und von symmetrischen Reizpaaren (a, b) und (b, a) nur jeweils eines. Danach verbleiben noch $(1/2)n(n - 1) = 351$ Paarvergleiche.

Eine weitere Reduktion ergab sich durch die Verwendung langer Folgenpaare, in denen alle Reizpaare enthalten waren. Bei simultaner Darbietung, d.h. jedem Ohr jeweils eine lange Folge, wurde dann von den Probanden verlangt, bei jedem Komponentenpaar zu beurteilen, ob der Ton im linken oder im rechten Ohr lauter ist. Für die Auswertung wurden dann die gesuchten Folgenpaare der Länge 3 mit Hilfe von „Fenstern“, die an den Folgen entlang gezogen wurden, ermittelt. Als Beurteilung dieser Folgenpaare wurde die Reaktion jeweils zum Zeitpunkt t gewertet.

Da die Beurteilung von Axiomenverletzungen sehr problematisch ist, weil es noch keine allgemein akzeptierten Kriterien gibt, wurde hier auf das Testen einzelner Axiome verzichtet. Die Auswertung erfolgte vielmehr mit einem Minimierungsalgorithmus nach Powell (1964). Damit wurden die Skalenwerte und Koeffizienten gesucht, die eine optimale Reproduktion der Relationenmatrix (d.h. der Urteile bei den Paarvergleichen) erbrachten. Die Ergebnisse für 6 Durchgänge bei einem Probanden zeigt die Tabelle 1.

Tabelle 1
Skalenwerte und Proportionalitätskonstanten

	μ (50)	μ (60)	μ (66)	λ_1	λ_2	Min
1	1	12.87	22.88	−0.175	−0.365	22
2	1	16.17	25.21	−0.225	−0.103	14
3	1	14.45	24.19	−0.387	−0.113	23
4	1	12.31	22.89	−0.469	−0.029	12
5	1	9.37	14.95	−0.241	−0.121	23
6	1	20.70	27.38	−0.255	−0.084	11
m	1	14.31	22.92	−0.296	−0.136	

In den Spalten 2 bis 4 stehen die Skalenwerte der Reizkomponenten und in den Spalten 5 und 6 die Koeffizienten. In der letzten Spalte steht die Anzahl der Zellen der Relationenmatrix, die nicht reproduziert werden konnten. Die Reproduzierbarkeit bewegt sich zwischen 95% und 91%. Man sieht, daß auch tatsächlich Adaptation erfaßt wurde. Die Skalenwerte sind hinsichtlich der Intensität monoton steigend. Die Koeffizienten sind negativ, d.h., die beiden vorangegangenen Reize haben einen negativen Einfluß auf die Lautheit des momentanen Reizes. Dabei ist, abgesehen vom ersten Durchgang, der Einfluß des letzten Reizes größer als der des vorletzten Reizes. Will man diesen Zusammenhang als lineares System angeben, dann ergibt sich als Realisation:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_t$$

$$y_t = [1 \ -0.296 \ -.0136] \ \mathbf{x}_t.$$

Dabei wurden die gemittelten Werte der Koeffizienten eingesetzt. Als Eingabemenge dienen die Skalenwerte.

Diskussion

Es wurde gezeigt, daß durch die Kombination meßtheoretischer und systemtheoretischer Methoden die Repräsentation dynamischen psychologischen Verhaltens durch lineare Systeme möglich ist. Dazu wurde die Theorie des additiv verbundenen Messens erweitert. Bei der Anwendung der Methode können, wie in dem Beispiel der Lautheitsadaptation gezeigt wurde, gleichzeitig die Ausgabegrößen gemessen und ein lineares System identifiziert werden, wenn die spezifizierten qualitativen Bedingungen einer Ordnungsrelation auf der Menge der Eingabefolgen erfüllt sind. Dies ermöglicht die Anwendung in der Psychologie, da so die nicht direkt erfaßbaren psychologischen Ausgabegrößen – unter Umständen auch psychologische Eingabegrößen – erfaßt werden können, ohne problematische Methoden wie das Größeneinschätzen verwenden zu müssen.

Noch ein weiterer Vorteil gegenüber den „herkömmlichen" Anwendungen der linearen Systemtheorie in der Psychologie soll erwähnt werden. Da psychophysische Funktionen bekannterweise nicht linear sind, werden die physikalischen Eingangsgrößen meist ad hoc nichtlinear transformiert. Bei der hier entwickelten Methode werden die Nichtlinearitäten durch die Skalierung auf elegante Weise aufgefangen.

Eine Schwierigkeit bei der Anwendung der hier vorgestellten Methode entsteht dadurch, daß sie deterministisch formuliert ist. Die Beurteilung von Axiomenverletzungen ist, wie auch sonst in der axiomatischen Meßtheorie, noch ungeklärt. Im Anwendungsbeispiel wurden deshalb die optimalen Skalenwerte mit einem Minimierungsprogramm gesucht. Wünschenswert wäre hier eine geeignete Fehlertheorie, um die einzelnen Axiome zu testen.

Summary

The application of linear system theory is based on the assumption, that the input and output sets are modules. To fulfill this assumption is not difficult for physical systems because most of the physical quantities are measurable by extensive measurement. But the application for modeling dynamic psychological behavior leads to several difficulties. At least the output sets are psychological quantities which are difficult to measure.

However, despite these difficulties it is possible to apply linear system theory in psychology if it is combined with axiomatic measurement theory. For systems with scalar input and output quantities, it is shown that after some modifications the theory of additive conjoint measurement is suitable for system identification. An example of the application to loudness adaptation is given.

Literatur

Debreu, G. (1960). Topological methods in cardinal utility theory. In K. J. Arrow, S. Karlin & P. Suppes (Eds.), *Mathematical methods in the social sciences*. Stanford: Stanford University Press.

Gregson, R. A. M. (1983). The sequential structure of odor mixture component intensity judgements. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 36*, 132–144.

Gregson, R. A. M. (1984). Invariance in time series representation of 2-input 2-output psychophysical experiments. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 37,* 100–124.

Hübner, R. (1988). *Eine experimentelle Analyse eines meßtheoretisch fundierten dynamischen Modells zur Lautheitsadaptation.* Unveröffentlichte Dissertation, Universität Regensburg.

Kalman, R. E., Falb, P. L. & Arbib, M. A. (1969). *Topics in mathematical system theory.* New York: McGraw Hill.

Koopmans, T. C. (1960). Stationary ordinal utility and impatience. *Econometrica, 28,* 287–309.

Koopmans, T. C. (1972). Representation of preference orderings over time. In C. B. McGuire & R. Radner (Eds.), *Decision and organisation.* Amsterdam, London: North-Holland.

Koopmans, T. C., Diamond, P. A. & Williamson, R. E. (1964). Stationary utility and time perspective. *Econometrica, 32,* 82–100.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P. & Tversky, A. (1971). *Foundations of measurement. Vol. I.* New York: Academic Press.

Lukas, J. (1987). Additiv verbundene Messung der wahrgenommenen Flächengröße: Ein experimentelles Verfahren zur Lösung des Testbarkeitsproblems. *Zeitschrift für Experimentelle und Angewandte Psychologie, 36,* 416–430.

Padulo, L. & Arbib, M. A. (1974). *System theory.* Philadelphia, London, Toronto: Saunders.

Powell, M. J. D. (1964). An efficient method for finding the minimum of a function in several variables without calculating derivatives. *Computer Journal, 7,* 155–162.

Anschrift des Verfassers: Dr. Ronald Hübner, Institut für Psychologie, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31, 8400 Regensburg.